Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Simon Müller
Michele Serra
Wintersemester 2019/2020

# Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

## Blatt 6

**Abgabe ihrer Lösung:** Bis Donnerstag, 5. Dezember 2019, 09:55 Uhr, in den Briefkasten ihres Tutors im Gebäude F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, schreiben Sie ihren Namen und den Namen ihres Tutors auf jedes Blatt und heften Sie ihre einzelnen Blätter zusammen.

**Aufgabe 6.1** *(5 Punkte)*

Sei $K$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ existiert, so dass

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(K) : \ A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $A \in M_{n\times n}(K)$ beliebig und seien $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Finden Sie Matrizen $B, C \in M_{n\times n}(K)$, so dass $(BAC)_{ij} = A_{ij}$ und $(BAC)_{lm} = 0$ für alle Tupel $(l, m) \neq (i, j)$.

(c) Sei $J \subseteq M_{n\times n}(K)$ eine Menge von $n \times n$-Matrizen über $K$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $J$ enthält eine Matrix $A \neq 0$;

(ii) $J$ ist abgeschlossen unter Addition, d.h., $A, B \in J \Rightarrow A + B \in J$;

(iii) $J$ ist abgeschlossen unter Links- und Rechtsmultiplikation mit Elementen aus $M_{n\times n}(K)$, d.h., für alle $A \in J$ und alle $X \in M_{n\times n}(K)$ gilt $AX \in J$ und $XA \in J$.

Zeigen Sie, dass bereits $J = M_{n\times n}(K)$ gilt.

**Aufgabe 6.2** *(2 Punkte)*

Sei $K$ ein Körper und $V$ ein $K$-Vektorraum. Seien $U, W$ zwei Unterräume von $V$ mit

(i) $U + W = V$ und

(ii) $U \cap W = \{0\}$

Zeigen Sie, dass zu jedem $v \in V$ eindeutig bestimmte $u \in U$ und $w \in W$ existieren mit $v = u + w$.

**Aufgabe 6.3** *(5 Punkte)*

(a) Es seien $K$ ein Körper und $(V, +_V)$, $(W, +_W)$ zwei $K$-Vektorräume mit skalaren Multiplikationen $\cdot_V : K \times V \to V$ und $\cdot_W : K \times W \to W$. Es seien $U := V \times W$ sowie $+_U : U \times U \to U$ gegeben durch $(v_1, w_1) +_U (v_2, w_2) := (v_1 +_V v_2, w_1 +_W w_2)$ für $v_1, v_2 \in V$, $w_1, w_2 \in W$ und $\cdot_U : K \times U \to U$ gegeben durch $\lambda \cdot_U (v, w) := (\lambda \cdot_V v, \lambda \cdot_W w)$ für $\lambda \in K$, $v \in V$, $w \in W$.

Zeigen Sie, dass $(U, +_U)$ mit skalarer Multiplikation $\cdot_U$ ein $K$-Vektorraum ist.

(b) Im Folgenden bezeichne $F$ die Menge aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir versehen $F$ mit punktweiser Addition $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und $\mathbb{R}$-Skalarmultiplikation $\lambda \cdot f(x) := (\lambda f)(x)$ für $f, g \in F$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Sei $F_1 := \{f \in F | \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\}$ und $F_2 := \{f \in F | \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = -f(-x)\}$. Zeigen Sie, dass $F$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und $F_1$ und $F_2$ Unterräume von $F$ sind.

*Hinweis: Vgl. Aufgabe 1.1(a)*

(c) Bestimmen Sie $F_1 \cap F_2$ und $F_1 + F_2$.

**Aufgabe 6.4** *(4 Punkte)*

Seien $X, Y$ Mengen. Wir bezeichnen mit $X \setminus Y$ die *Differenzmenge (auch Restmenge) von X und Y*, d.h.,

$$X \setminus Y = \{x \in X : x \notin Y\}.$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_n \setminus \mathbb{Z}_n^\times$ genau dann ein **kommutativer Ring ohne** $1$ ist wenn $n = p^k$ für eine Primzahl $p$ und ein $k \in \mathbb{N}_0$.